28/11/2019 Διαφορική Γεωμετρία.

Διάλεξη 14η

$N : x(U) \to \mathbb{R}^3$

$N = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \circ x^{-1}$

$\|N(p)\| = 1, \ \forall p \in x(U)$

$N(p) \perp T_pS, \ \forall p \in x(U)$

N: καλείται μοναδιαίο κάθετο διαφορικό διανυσματικό πεδίο της S.

• Έστω $\tilde{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παράμετρο $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$. $\tilde{N} : x(\tilde{U}) \to \mathbb{R}^3$

$\tilde{N} = \dfrac{\tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}\|} \cdot \tilde{x}^{-1}$

$W = x(U) \cap \tilde{x}(\tilde{U}) = \emptyset.$

Γνωρίζω ότι η $\tilde{x}^{-1} \circ x \circ x^{-1}(W) \to \tilde{x}^{-1}(W)$ είναι λεία

$\Phi = \tilde{x}^{-1} \circ x, \quad \Phi(u,v) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) = (\tilde{u}, \tilde{v})$

$\Downarrow$

$\tilde{x} \circ \Phi = x \Rightarrow x(u,v) = \tilde{x}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))$

$x_u = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} \tilde{x}_{\tilde{u}}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} \tilde{x}_{\tilde{v}}(\ldots)$

$x_v = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \tilde{x}_{\tilde{u}}(\ldots) + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \tilde{x}_{\tilde{v}}(\ldots)$

$x_u \times x_v = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \tilde{x}_{\tilde{v}} \times \tilde{x}_{\tilde{u}}$

$= \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right) \tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}$

$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}$

$$x_u \cdot x_v = \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{x}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{x}_{\tilde{v}}$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}}{\left|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right|} \cdot \frac{\tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}}{\left|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right|} \tilde{N}$$

$\Rightarrow \tilde{N} = \pm N$

Ερώτημα: Δοθείσης κανονικής επιφάνειας S υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφ. διαν. πεδίο $N: S \to \mathbb{R}^3$;

Προσανατολίσιμες Επιφάνειες

Ορισμός: Μια κανονική επιφάνεια καλείται προσανατολίσιμη αν-ν υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφ. διαν. πεδίο $N: S \to \mathbb{R}^3$, δηλαδή $\|N(p)\| = 1$, $N(p) \perp T_pS$, $\forall p \in S$. Κάθε τέτοιο N καλείται προσανατολισμός. Μια επιφάνεια καλείται προσανατολισμένη αν-ν είναι προσανατολίσιμη και την έχουμε εφοδιάσει με έναν προσανατολισμό.

Παρατήρηση: Το τυχαίο κάθε επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό $N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \circ x^{-1}$.

Θεώρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f και το $f^{-1}(a)$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό $N: f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3$ με

$$N(p) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(p), \quad p \in f^{-1}(a).$$

Αποδ.

Θεωρώ $p \in f^{-1}(a)$ και $w \in T_pS$. Υπάρχει καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(a)$ ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = w = (w_1, w_2, w_3)$.

$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in f(a) \Rightarrow$

$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Παραγωγίζω:

$x'(t) f_x(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) f_y(\ldots) + z'(t) f_z(\ldots) = 0$

$\Rightarrow x'(0) f_x(p) + y'(0) f_y(p) + z'(0) f_z(p) = 0$

$\Leftrightarrow \langle (x'(0), y'(0), z'(0)), (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle c'(0), \operatorname{grad} f(p) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle w, \operatorname{grad} f(p) \rangle = 0$

$\forall w \in T_pS$.

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(p) \in T_pS, \ \forall p$.

Απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση:

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N. Η απεικόνιση Gauss της S είναι η απεικόνιση $N: S \to S^2$ η οποία αντιστοιχεί στο τυχαίο $p \in S$. Το σημείο $\bar{p} = N(p) \in S$

$\vec{OP} = N(p)$.

Γραφήματα: $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\Gamma_h = \{ (x, y, h(x,y)) \mid (x,y) \in U \}$, $X: U \to \Gamma_h$

$X(u,v) = (u, v, h(u,v))$

Γ_h καλύπτεται από το X μόνο

Κάθε γράφημα είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|} \cdot X^{-1}$.

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1,0,h_u) \\ X_v &= (0,1,h_v) \end{aligned}\right\} \quad X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} = (-h_u, -h_v, 1)$$

$$N: \Gamma_h \to S^2, \quad N(x,y,h(x,y)) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y) + 1}}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1) Επίπεδα: $(\Pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \quad (A,B,\Gamma) \neq (0,0,0)$

$(\Pi) = f^{-1}(0), \quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = Ax + By + \Gamma z + \Delta$

$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (A,B,\Gamma) \neq (0,0,0) \xRightarrow{\text{Θεωρ.}}$

(Π): είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό

$$N(p) = \frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|}(p) = \frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Η απεικόνιση Gauss της (Π) είναι η $\dfrac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$

$$N: (\Pi) \to S^2, \quad N((\Pi)) = \left\{ \frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \right\}$$

2) Ορθοί κύλινδροι: $C_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}, \ r > 0$

$C_r = f^{-1}(0)$ με $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2$

$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 0) \neq (0,0,0), \quad \forall (x,y,z) \in C_r$

$$N(x,y,z) = \frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4r^2}} = \frac{1}{r}(x,y,0)$$

$(x,y,z) \in C_r$

Συμπέρασμα: Η απεικόνιση Gauss του C_r είναι η $N: C_r \to S^2$, $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,0)$.

Σφαιρική εικόνα $= N(C_r)$

3) Σφαίρες: $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$S^2_R = f^{-1}(0)$, όπου $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$, $\forall (x,y,z) \in f^{-1}(0)$

Άρα η S^2_R είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό

$$N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

Συμπέρασμα: Η απεικόνιση Gauss της S^2_R είναι η $N: S^2_R \to S^2$ με $N(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$

$N(S^2_R) = S^2$

- Έστω $S, \tilde{S}$ γεωμ. ισότιμες κανονικές επιφάνειες και $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\tilde{S} = T(S)$. $T = T_v \circ A$, T_v = παράλληλη μεταφορά, $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορθ. μετασχ. Υποθέτω ότι η S είναι προσανατολισμένη με προσανατ. $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$, $\tilde{N} = \pm AN$.

$$\tilde{X} = T \circ X \begin{cases} \to \tilde{X}_u = AX_u \\ \to \tilde{X}_v = AX_v \end{cases} \quad \tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = AX_u \times AX_v = \pm A(X_u \times X_v)$$

- Έστω S προσανατολ. επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N: S \to S$.

Απεικόνιση Weingarten ή τελεστής σχήματος:

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss: $N: S \to S^2$. Καλούμε απεικόνιση Weingarten της S στο σημείο $p \in S$ την απεικόνιση $L_p = -dN_p$.

$L_p = -dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2 \equiv T_pS$

$L_p : T_pS \to T_pS$: γραμμ. ενδομορφισμός του T_pS.

Παραδείγματα:

1) Επίπεδο: Θεωρώ επίπεδο $(\pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$. $L_p: T_p\Pi \to T_p\Pi$, $L_p = -dN_p$

$p \in (\pi)$, $w \in T_p\Pi$: $\exists\, c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \pi$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$

$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0) = 0$

$L_p = 0$, $\forall p \in \pi$.

2) Ορθός κυκλικός κύλινδρος:

Η απεικόνιση Gauss είναι $N: C_r \to S^2$,

$N(x, y, z) = -\frac{1}{r}(x, y, 0)$

$L_p: T_pC_r \to T_pC_r$, $p \in C_r$, $p = (x_0, y_0, z_0) \in C_r$

$w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pC_r$, $L_p w = ;$

Υπάρχει καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to C_r$ ώστε $c(0) = p$, $c'(0) = w$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$

$N \circ c(t) = N(c(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{r}(x(t), y(t), 0)$

$(N \circ c)'(0) = -\frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0)$

$L_p w = \frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0) \Rightarrow$

$L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pC_r$

$$T_p C_r = \{ w \in T_p\mathbb{R}^3 \mid \langle w, N(p) \rangle = 0 \}$$
$$= \{ w = (w_1, w_2, w_3) \mid \langle w_1, w_2, w_3, -\tfrac{1}{r}(x_0, y_0, 0) \rangle = 0 \}$$

$$\Rightarrow T_p C_r = \{ w = (w_1, w_2, w_3) \mid w_1 x_0 + w_2 y_0 = 0 \}$$
$$p = (x_0, y_0, z_0)$$

- Αν $w = (w_1, w_2, 0)$, $L_p w = \frac{1}{r} w$
- Αν $w = (0, 0, w_3)$, $L_p = 0 \cdot w$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Σφαίρες: $S^2_R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$

Η απεικόνιση Gauss είναι $N: S^2_R \to S^2$,

$$N(x, y, z) = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

Στο σημείο $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2_R$ η απεικόνιση Weingarten είναι $L_p: T_p S^2_R \to T_p S^2_R$, $L_p = -dN_p$.

$w \in T_p S^2_R$.

Υπάρχει καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2_R$,

$c(0) = p$, $c'(0) = w$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$w = (x'(0), y'(0), z'(0))$

$$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$$

$$N \circ c(t) = N(c(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) =$$
$$= -\frac{1}{R}(x(t), y(t), z(t))$$

$$\Rightarrow (N \circ c)'(0) = -\frac{1}{R}(x'(0), y'(0), z'(0))$$

Άρα $L_p w = \frac{1}{R} w$, $\forall w \in T_p S^2_R$, $L_p = \frac{1}{R} Id$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

$$L_p X_u(u, v) = -(N \circ X)_u(u, v)$$

$$L_p X_v(u, v) = -(N \circ X)_v(u, v)$$

$$L_p X_u(u, v) = -dN_p(X_u(u, v)) = -(N \circ X(u, v = \text{σταθ}))_u$$